

4. Exercicis d'integrals definides

Exercici 4.1 Integrals definides

Calculeu les integrals definides següents:

a) $\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3) \cdot dx$

b) $\int_1^4 \sqrt{x} \cdot dx$

c) $\int_6^{10} \frac{dx}{x+2}$

d) $\int_1^e \ln x \cdot dx$

e) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

f) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$

g) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) \cdot dx$

h) $\int_3^{11} \sqrt{2x+3} \cdot dx$

i) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot dx$

j) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$

k) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$

l) $\int_1^{\infty} x \cdot \sin x \cdot dx$

Solucions:

a) 4/3 b) 14/3 c) 0,405 d) 1 e) $\pi/4$ f) $a^2 \cdot \pi/4$ g) 1/2 h) 98/3
i) 1 j) $\pi/2a$ ($a > 0$) k) 1/4 l) divergeix

Exercici 4.2 Àrees planes

Calculeu l'àrea tancada per les corbes:

a) $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 5$.

b) $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 3$.

c) $y = 4x - x^2, y = 0, x = 1, x = 3$.

d) $x = y^2 + 4y, x = 0$.

e) $y = 9 - x^2, y = x + 3$.

f) $y = x^2 - 4, y = 8 - 2x^2$.

g) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 0, x = 2$.

h) $x \cdot y = 12, y = 0, x = 1, x = e^2$.

i) $y^2 = 9x, y = 3x$.

j) $y = 4 - x^2, y = 0$.

Solucions:

a) 39 b) 20 c) 22/3 d) 32/3 e) 125/6 f) 32 g) $e^2 + 1/e^2 - 2$ h) 24
i) 9/2 j) 32/3



Exercici 4.3 Longitud d'arcs de corbes

Calculeu la longitud dels arcs de les corbes:

- a) $y = x^{3/2}$ entre $x = 0$ i $x = 5$.
 b) $y^3 = 8x^2$ entre $x = 1$ i $x = 8$.
 c) $y = \ln x$ entre $x = 1$ i $x = 2\sqrt{2}$.
 d) $y = \ln(\cos x)$ entre $x = \pi/6$ i $x = \pi/4$.
 e) Longitud total de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
 f) $a \cdot y^2 = x^3$ entre $x = 0$ i $x = 5a$.

Solucions:

- a) $335/27$ b) $9\sqrt{26}$ c) $2\sqrt{12}$ d) $0\sqrt{332}$ e) $6a$ f) $335a/27$

Exercici 4.4 Àrees de superfícies de revolució

Calculeu l'àrea de la superfície generada pel gir de l'arc indicat al voltant de l'eix donat:

- a) $y = mx$ entre $x = 0$ i $x = 5$ al girar al voltant de l'eix Ox (genera un con).
 b) $y = x^3/3$ entre $x = 0$ i $x = 3$ al girar al voltant de l'eix Ox .
 c) $x = y^3$ entre $y = 0$ i $y = 1$ al girar al voltant de l'eix Oy .
 d) $y = \ln x$ entre $x = 1$ i $x = 7$ al girar al voltant de l'eix Oy .
 e) $y^2 = 4ax$ entre $x = 0$ i $x = 3a$ al girar al voltant de l'eix Ox .
 f) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ al girar al voltant de l'eix Ox (genera un tor).

Solucions:

- a) $25m\pi\sqrt{1+m^2}$ b) $258\sqrt{85}$ c) $3\sqrt{56}$ d) $49\sqrt{85.2\pi}$
 e) $56\pi a^2/3$ f) $4\pi^2 ab$

Exercici 4.5 Volums de sòlids de revolució

Calculeu el volum generat pel gir de l'arc indicat al voltant de l'eix donat:

- a) $y = 2x^2$ entre $x = 0$ i $x = 5$ al girar al voltant de l'eix Ox .
 b) $x^2 - y^2 = 16$ entre $x = 0$ i $x = 8$ al girar al voltant de l'eix Ox .
 c) $y = 4x^2$ entre $x = 0$ i $x = 2$ al girar al voltant de l'eix $y = 16$.
 d) Interior a $4x^2 + 9y^2 = 36$ al girar al voltant de l'eix Oy .
 e) Interior a $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ al girar al voltant de l'eix Ox .
 f) Volum del tor engendrat pel gir del cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($b > a$) al girar al voltant de l'eix Ox .

Solucions:

- a) 2500π b) $256\pi/3$ c) $4096\pi/15$ d) 24π
 e) $4\pi a^2 b/3$ f) $2\pi^2 a^2 b$